Лекция №5

Вероятность появления случайных событий

1) **Теорема сложения вероятностей;**
2) **Теорема умножения вероятностей.**

Вероятность появления случайных событий

Вероятность некоторого события А обозначатся р(А) и по классической схеме вычисляется по формуле

$$P(A) = m/n,$$

где m – число испытаний, при которых наступает событие А; n – общее число испытаний.

Количественная мера возможности появления события называется ***вероятностью случайного события***.

Сумма вероятностей события ***A*** и противоположного ему события ***A’*** равна единице

P(A) + p(A’) = 1.

Допустим, что при проведении n испытаний событие ***A*** наступило ровно ***k*** раз.

Вероятность такого факта $p_n(k)$ определяется по формуле Бернулли

$$\boldsymbol{p_n(k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k},}$$

где $\boldsymbol{C_n^k}$ – число сочетаний из ***n*** элементов по ***k***; ***p*** – вероятность появления события ***A*** в одном испытании; $q = 1 – p$ – вероятность противоположного события.

$$\boldsymbol{C_n^k = n!/k! \times (n-k)!}$$

Тогда формула преобразуеется

$$\boldsymbol{p_n(k) = [n!/k! \times (n-k)!] \times p^k \times q^{n-k}.}$$

Вероятность при большом числе испытаний

При большом числе испытаний справедлива формула Пуассона

$$P_n(K) = \frac{(\quad ^{k}\, x\, e^{-} \quad)}{K}$$

Зная вероятность появления события А в одном испытании, интен-сивность вычисляется по формуле

$$= p\ x\ n.$$

Вероятность появления события А ровно К раз на заданном интервале времени t определяется по обобщенной формуле Пуассона

$$P_n(K) = [\ (\lambda t)^k\ x\ e^{-\lambda t}\ )]\ /\ k!$$

где λ - интенсивность появления события А в единицу времени.

Теории действий с вероятностями случайных событий

Достаточно малое значение вероятности события, которое в условиях определенного исследования можно считать практически невозможным, называется уровнем *значимости* (α).

Обычно принимают α = 0,01…0,1.

Область значений, в которой вероятность равна или меньше уровня значимости, называется *критической*.

Теорема сложения вероятностей

Если события А и В таковы, что при каждом испытании может появиться только одно из них или ни одного, а вместе они появиться не могут, то такие события называются несовместимыми, и для них справедлива теория сложения вероятностей – вероятность суммы двух несовместимых событий

P(A или B) = p(A) + p(B).

И наоборот, события являются совместимыми, если они появляются одновременно в течение одного эксперимента или испытания.

Вероятность появления суммы нескольких несовместимых событий равна сумме вероятностей появления этих событий:

$$P(A + B + C + \ldots + n) = p(A) + p(B) + p(C) + \ldots + p(n).$$

Приведённые выше рассуждения выходят на два следствия:

Приведённые выше рассуждения выходят на два следствия:

Следствие 1. Если события $A1$, $A2$ … An образуют полную группу несовместимых событий, то сумма их вероятностей равна единице

$$P(A_i) = 1 \qquad (1)$$

Противоположными событиями называют два несовместимых события, образующих полную группу.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице $$P(A) + P(A') = 1,$$
где A' – событие, противоположное событию А.

Вероятность суммы двух совместимых событий А и В выражается формулой

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Аналогично вероятность суммы трёх совместимых событий определяется выражением

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC),$$

где $P(AB)$ и $P(ABC)$ – вероятности произведения двух и трех событий соответственно.

Пример. В процессе математических расчетов произвольно выбираются две расчетные схемы. Вероятность правильности выбора первой расчетной схемы – $P(A_1) = 0{,}35$, вероятность правильности выбора второй – $P(A_2) = 0{,}45$. Найти вероятность того, что обе схемы были выбраны неправильно (событие B).

Решение. Событие, характеризующее правильность выбора одной из схем, обозначим A:

$$A = A_1 + A_2.$$

Согласно формуле (4.12)

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}35 + 0{,}45 = 0{,}8,$$

тогда $P(B) = 1 - P(A) = 0{,}2$.

Теорема умножения вероятностей

События бывают независимыми и зависимыми. Если события А и В таковы, что наступление одного из них не исключает вероятности наступления другого, то они называются независимыми, и для них справедлива теорема умножения вероятностей

$$P(A \text{ и } B) = p(A) \times p(B).$$

Понятия зависимости и независимости событий можно наглядно представить на следующих примерах.

Пример 1. Два биатлониста стреляют каждый по своей мишени. Событие А – попал в мишень первый биатлонист, событие В – в мишень попал второй биатлонист.

Как видно, вероятность события А не зависит от того, произошли или нет событие В. Следовательно, событие А не зависит от события В.

Пример 2. В некоторой ёмкости имеется три одинаковых по размеру и форме предмета: два красных и один зелёный. Два человека вытаскивают из ёмкости по одному предмету, и при этом рассматриваются следующие события: событие A – красный предмет у первого человека и событие B – появление красного предмета у второго человека.

Вероятность события A до того, как становится известным что-либо о событии B, равна 2/3. Если стало известно, что событие B произошло (т.е. второй человек вытащил именно красный предмет), то вероятность события A становится равным 1/2. Отсюда можем сделать вывод, что событие A зависит от события B.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность события А, вычисленная при условии, что имело место событие В, называется условной и обозначается р(А/В).

Теорема умножения вероятностей может быть сформулирована следующим образом: «Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место»:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Понятие независимости событий может быть распространено на любое их количество, а именно: вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Следствием обеих основных теорем, теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей, является **формула полной вероятности**.

Пусть требуется определить вероятность некоторого события А при условии, что оно может произойти вместе с одним из несовместимых событий, H_1, H_2 … H_n, которые будем называть гипотезами по отношению к событию А. При этом данные гипотезы также имеют вероятность своего появления.

Если на основании статистических данных заранее известны вероятности гипотез p(Hi), а также условные вероятности события А при этих гипотезах p(A/Hi), то искомое значение вероятности некоторого события А – p(A) находится с помощью теоремы умножения по формуле ***полной вероятности*** $\boldsymbol{P(A) = \quad p(H_i) \times p(A/H),}$ (2)

где p(A) – полная вероятность события А; n – количество гипотез; p(Hi) – вероятность i-й гипотезы; $p(A/H_i)$ *– условная вероятность события А при гипотезе* H_i*.*

Таким образом, полная вероятность события А вычисляется как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на вероятность события А при этой гипотезе.

Гипотезы H_1, H_2 … H_n несовместимы, поэтому событие А может появиться только в комбинации с какой-либо из этих гипотез

$$A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA. \qquad (3)$$

Так как гипотезы H_1, H_2 … H_n несовместимы, то и комбинации $H_1A + H_2A + \ldots + H_nA$ также несовместимы.

Обозначим вероятность появления каждой гипотезы при возникновении события А $p(H_1/A)$, $p(H_2/A)$ … $p(H_n/A)$. Теперь положим, что в результате проведенных испытаний имело место событие А.

Применяя теорему сложения, получим для этих гипотез

$$P(A) = p(H_1/A) + p(H_2/A) + \ldots + p(H_n/A) = \quad p(H_i \times A). \qquad (4)$$

На основании формул (4.19) и (4.21) искомая вероятность гипотезы Hi, при условии, что событие А произошло именно при данной гипотезе, вычисляется по формуле Байеса

$$p(H/A) = [P(A/H_i) \times p(H_i)] \,/\, p(A)$$

Задача 1. По движущейся мишени производят три выстрела. Вероятность попа-дания при первом выстреле P(1) = 0,5, при втором – P(2) = 0,7, при третьем – P(3) = 0,8. Событие А – выход из строя мишени: при одном попадании – с вероят-ностью 0,3, при двух попаданиях – с вероятностью 0,9.

Необходимо определить полную вероятность выхода из строя мишени (собы-тие А) после трёх выстрелов.

Решение. Имеем четыре гипотезы: H_0 – в мишень не попало ни одного снаря-да, H_1 – в мишень попал один снаряд, H_2 – в мишень попало два снаряда, H_3 – в мишень попало три снаряда.

Используя теоремы сложения (несовместимые события) и умножения (незави-симые события), найдём вероятности всех этих гипотез

$$P(A/H_0) = 0;\ P(A/H_1) = 0,3;\ P(A/H_2) = 0,9;\ P(A/H_3) = 1,0;$$

$$P(H_0) = 0,5·0,3·0,2 = 0,03;\ P(H_1) = 0,5·0,3·0,2 + 0,5·0,7·0,2 + 0,5·0,3·0,8 = 0,22;$$

$$P(H_2) = 0,5·0,7·0,2 + 0,5·0,3·0,8 + 0,5·0,7·0,8 = 0,47;\ P(H_3) = 0,5·0,7·0,8 = 0,28.$$

Условные вероятности события А при указанных выше гипотезах, согласно условию задачи, равны

$$P(A/H_0) = 0;\ P(A/H_1) = 0,3;\ P(A/H_2) = 0,9;\ P(A/H_3) = 1,0.$$

Применяя формулу полной вероятности, получаем искомое

$$P(A) = P(H_0)P(A/Ho) + P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = 0,769.$$